Concursul Fractal

A treia Ediție, 19 ianuarie 2025

Problema 1. Pe o tablă sunt scrise numerele 1 și 2. La orice operație, Viorel poate schimba numerele de pe tablă a și b în $a-b$ și $a+b$. Poate oare Viorel ajunge la numerele $2024 \cdot 2^{2024}$ și $2025 \cdot 2^{2025}$?

Soluție: Observăm că $(a-b)^2+(a+b)^2=2(a^2+b^2)$, astfel după fiecare operație suma pătratelor elementelor se dublează. Cu toate acestea, dacă am ajunge de la 1 și 2 la $2024 \cdot 2^{2024}$ și $2025 \cdot 2^{2025}$, suma pătratelor celor două numere ar fi egală cu suma pătratelor lui 1 și 2 înmulțită cu o putere de 2, ce nu e posibil căci $1^2+2^2=5$, dar suma celor două pătrate nu se împarte la 5.

Problema 2. Găsiți toate tripletele de numere reale nenule a, b, c care satisfac simultan următoarele condiții:

$$\begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{23}{6} \\ \\ \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = \frac{25}{6} \\ \\ a + b + c = 6 \end{cases}$$

Soluție: Notăm numerele $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$,și $\frac{c}{a}$ cu x, y și z respectiv. Prima condiție devine $x+y+z = \frac{23}{6}$, iar cum $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$ și analoagele, a doua condiție devine $xy + yz + zx = \frac{25}{6}$. Nu în ultimul rând, e clar că produsul celor trei numere este 1, deci conform relațiilor lui Viete, avem că x, y, și z sunt rădăcini ale ecuației cubice $t^3 - \frac{23}{6}t^2 + \frac{25}{6}t - 1 = 0$, care ușor se rezolvă având rădăcinile $1/3$, $3/2$ și 2. Iar mai departe problema devine doar un sistem de ecuații liniare ce se rezolvă ușor.

Problema 3. Găsiți toate pătratele perfecte N care nu conțin cifra 0 și cu proprietatea că oricum am schimba cu locul cifrele în reprezentarea decimală a lui N, obținem un pătrat perfect.

Soluție: Inițial vom rezolva cazul în care toate cifrele numărului sunt identice. Dacă numărul are k cifre de d, păi $d \cdot \frac{10^k-1}{9}$ e pătrat perfect, deci și $d \cdot (10^k - 1)$, la fel este. $d = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$ clar nu se potrivesc din cauza restului împărțirii la 8 pentru k mai mare decât 1, iar pentru $d = 7$ avem o contradicție la restul la împărțire la 5. Astfel acest caz are doar soluțiile $1, 4, 9$. Acum, dacă numărul are cel puțin 2 cifre distincte, punem aceste două cifre la sfârșitul numărului și le schimbăm cu locul. Cele două numere obținute diferă cu cel mult 81. Și cum ambele sunt pătrate perfecte, ele sunt cel mult 1600. Acum avem 9 pătrate mai mari decât 1000 ce se verifică ușor că nu merg, și putem la fel verifica ușor că pătrate de 3 cifre nu satisfac condiția.

Problema 4. Este dat triunghiul ABC, cu cercul circumscris lui Ω și punctul magic M în interiorul acestuia. Punctul M are proprietatea că cercul ω_A prin M și A tangent la Ω intersectează AB în Z și AC în Y, cercul ω_B prin M tangent la Ω în B intersectează BC în X și AB în Z, iar cercul ω_C prin M tangent la Ω în C intersectează BC în X și AC în Y. Un alt cerc ω e tangent interior la ω_A și tangent exterior la ω_B și ω_C. Notăm punctul de tangență ale cercurilor ω și ω_A cu T. Arătați că cercul circumscris triunghiului MXT trece prin punctul diametral opus lui A pe Ω.

Soluție: Vom inversa imaginea din M. Vârfurile triunghiului vor deveni punctele de tangență a cercului înscris în triunghi, iar cele trei cercuri tangente, laturile acestuia. Cercul ω va deveni cercul A-exânscris triunghiului, și condiția de conciclicitate va deveni condiția de coliniaritate a punctului diametral opus lui A cu punctul de tangență a cercului exânscris, ce e clar din omotetia ce trimite cercul înscris în cel exânscris.